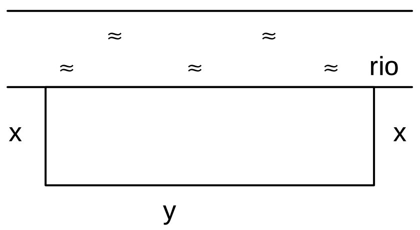
PROAC / COSEAC - Gabarito

Prova de Conhecimentos Específicos

1ª Questão: (2,0 pontos)

Um fazendeiro decide cercar um pasto na forma de um retângulo à margem de um rio retilíneo. Como ele só tem 1.000 m de cerca e sabe que o gado não vai escapar pelo rio, resolve não erguer cerca ao longo da margem. Nessas circunstâncias, quais as dimensões do pasto de área máxima que ele pode cercar?

Cálculos e respostas:



Sejam x e y as dimensões dos lados do pasto.

A área do pasto é $A(x, y) = x \cdot y$

Tem-se:

$x + y + x = 2x + y = 1000$

$\therefore\ y = 1000 - 2x$

Podemos expressar a área como função só de x:

$A(x) = x(1000 - 2x)$

Trata-se de achar o máximo da função A

A é derivável $A'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 1000 = 0 \Leftrightarrow x = 250$.

Como $A''(250) = -4 \leq 0$ então $x_0 = 250$ é ponto de máximo para A.

$x_0 = 250 \Rightarrow y_0 = 1000 - 2 \times 250 = 500$

As dimensões são $x = 250$ m
$y = 500$ m

PROAC / COSEAC - Gabarito

2ª Questão: (2,0 pontos)

Seja V um espaço vetorial real com produto interno $<, >$ e $T: V \longrightarrow V$ um operador linear auto-adjunto. Mostre que se $< T.u, u > = 0$ para todo $u \in V$ então $T \equiv 0$ (T é o operador nulo).

Cálculos e respostas:

Por hipótese

$\langle T(u+v),(u+v)\rangle = 0 \quad \forall u,v \in V$

$\therefore \quad 0 = \langle Tu,u\rangle + \langle Tu,v\rangle + \langle Tv,u\rangle + \langle Tv,v\rangle$

Como $\langle Tu,u\rangle = 0$ e $\langle Tv,v\rangle = 0$ obtemos

$0 = \langle Tu,v\rangle + \langle Tv,u\rangle$

Como T é auto-adjunto $\langle Tv,u\rangle = \langle v,Tu\rangle \ \forall u, v.$

Donde

$0 = \langle Tu,v\rangle + \langle v,Tu\rangle = \langle Tu,v\rangle + \langle Tu,v\rangle = 2\langle Tu,v\rangle$

$\therefore \langle Tu,v\rangle = 0 \ \forall u, v \in V$

Fixado qualquer u tem-se $\langle Tu,v\rangle = 0$ para todo $v \in V \Rightarrow Tu = 0$

Como u é qualquer então $T \equiv 0$

PROAC / COSEAC - Gabarito

3ª Questão: (2,0 pontos)

Esboce a região D delimitada pelas curvas:

C_1: $x^2 + y^2 = 9$

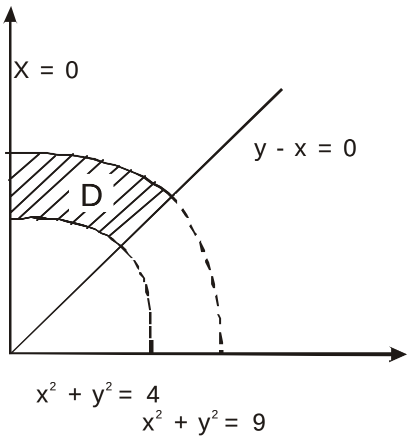
C_2: $x^2 + y^2 = 4$

C_3: $x - y = 0$

C_4: $x = 0$

Calcule a integral de $f(x,y) = e^{(x^2+y^2)} + 3$ sobre D.

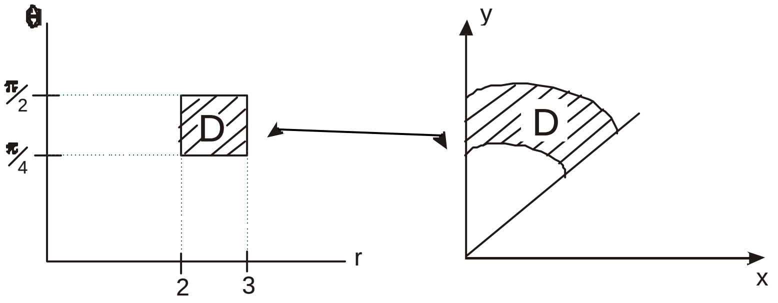
Cálculos e respostas:



$$\iint_D \left[e^{(x^2+y^2)} + 3 \right] dA =$$

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dA + 3 \iint_D dA$$

Convertendo a 1ª integral para coordenadas polares: $x^2 + y^2 = r^2$



$$\iint_D e^{x^2+y^2} dA = \iint_{D'} e^{r^2} \cdot rdA = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_2^3 e^{r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{2} \int_2^3 e^{r^2}\, 2r\, dr\; d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{2}(e^9 - e^4)\, d\theta$$

Cálculos e respostas:

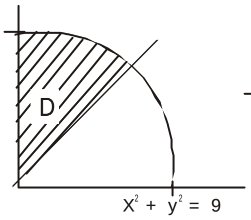
$$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right).\frac{1}{2}\left(e^{9}-e^{4}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(e^{9}-e^{4}\right) \quad \text{unidades de área.}$$

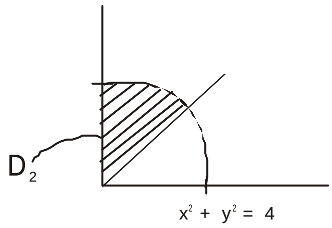
Por sua vez $\iint_D 3\, dA =$

$$= 3 \iint_D dA = 3 \text{ x área (D)}$$

área de D =



—



$$=\frac{1}{8}\pi \cdot 9-\frac{1}{8}\pi \cdot 4=\frac{5\pi}{8}$$

$$\therefore \quad \iint_D \left[e^{(x^2+y^2)}+3\right] dA=\frac{\pi}{4}(e^{9}-e^{4})+\frac{15\pi}{8}$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[2e^{9}-2e^{4}+15\right] \quad \text{unidades de área.}$$

PROAC / COSEAC - Gabarito

4ª Questão: (2,0 pontos)

Determine uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado pelos vetores (1,1,0) e (0,1,-1) e cuja imagem é gerada pelo vetor (0,1,2). Determine a matriz $T]_{\beta}^{C}$ dessa transformação em relação às bases $C = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e $\beta = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,0)\}$.

Cálculos e respostas:

Como uma transformação linear fica determinada a partir de seus valores numa base do domínio, considere a base

$\alpha = \{ (1,1,0); (0,1,-1); (0,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$

Defina T nos vetores da base α por

T(1,1,0) = (0,0,0)

T(0,1,-1) = (0,0,0)

T (0,1,0) = (0,1,2)

Se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tem-se

(x, y, z) = a (1,1,0) + b (0,1,-1) + c (0,1,0)

$\Rightarrow (x, y, z) = (a, a + b + c, - b) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = a + b + c \\ z = -b \end{cases} \quad \Rightarrow y - x + z = c$$

donde (x,y,z) = x(1,1,0) – z(0,1,-1) + (-x + y + z) (0,1,0)

Assim T(x,y,z) = x. T(1,1,0) – z T(0,1,-1) + (-x + y + z) T (0,1,0) $\Rightarrow$

T(x,y,z) = (-x + y + z) (0,1,2) = (0, -x + y + z, -2x + 2y + 2z)

PROAC / COSEAC - Gabarito

Cálculos e respostas:

Para determinar $T]_{\beta}^{C}$ temos que

T(1,0,0) = (0,-1,-2) = a (1,0,1) + b (1,1,0) + c (0,1,0)

T (0,1,0) = (0,1,2) = a (1,0,1) + b(1,1,0) + c(0,1,0)

T(0,0,1) = (0,1,2)

1^{o} caso (0,-1,-2) = (a + b; b+ c; a) $\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=-1 \\ a=-2 \end{cases} \Rightarrow$ a = - 2, b = 2, c = -3

2^{o} caso (0,1,2) = (a + b, b+ c, a) $\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=1 \\ a=2 \end{cases} \Rightarrow$ a = 2, b = -2, c = 3

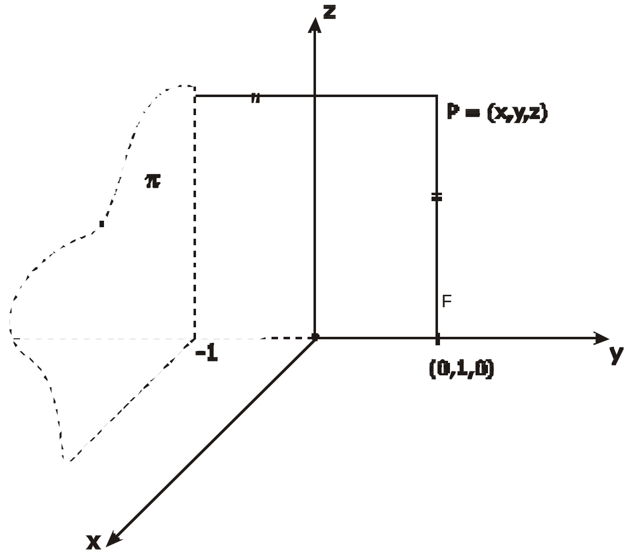
$$\therefore \; T]_{\beta}^{C} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

PROAC / COSEAC - Gabarito

5ª Questão: (2,0 pontos)

Determine a equação do lugar geométrico dos pontos eqüidistantes do ponto F = (0,1,0) e do plano π de equação y = —1.

Cálculos e respostas:



Seja P um ponto qualquer do lugar geométrico procurado

P = (x, y, z)

Devemos ter d(P,F) = d(P, π)

Isto é $\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} \quad = \quad |\, y - (-1)\,| \quad = |\, y + 1\,|$

Elevando ao quadrado

$x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = (y + 1)^2$

SImplificando

$x^2 + y^2 = 4y$ é a equação pedida.