PROAC / COSEAC - Gabarito

Prova de Conhecimentos Específicos

1ª Questão: (1,5 pontos)

Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 4}$.

Determine:

a) seu domínio;

b) os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente;

c) pontos de máximo local, de mínimo local e de inflexão, caso existam.

Cálculos e respostas:

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 4}$$

a) Domínio de f = $\mathbb{R}$

b) $f'(x) = \dfrac{3(x^2 + 4) - 3x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \dfrac{3x^2 + 12 - 6x^2}{(x^2 + 4)^2}$

$f'(x) = -3\dfrac{x^2 - 4}{(x^2 + 4)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$

$x = 2$ ou $x = -2$

		-2		2	
x - 2	-		-	0	+
x + 2	-	0	+		+
f'(x)	-	0	+	0	-
	↘		↗		↘

f é crescente se $-2 < x < 2$

f é decrescente se $x < -2$ ou $x > 2$

PROAC / COSEAC - Gabarito

Cálculos e respostas:

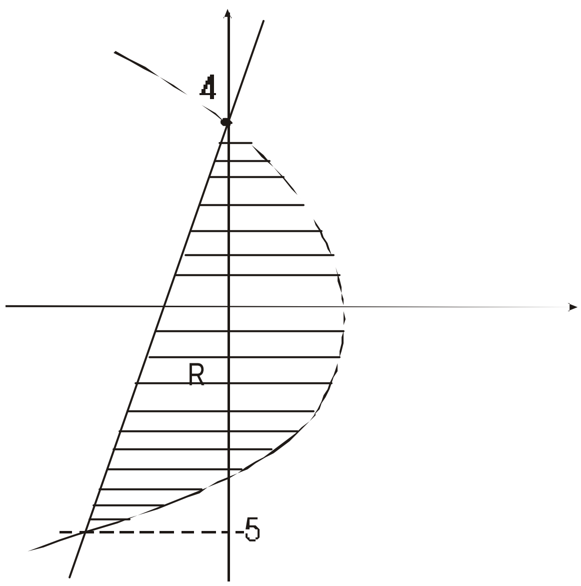
c) o ponto cuja abscissa é –2 é um ponto de mínimo local P $\left(-2, -\frac{3}{4}\right)$.

- o ponto cuja abscissa é 2 é um ponto de máximo local P $\left(2, \frac{3}{4}\right)$.
- não há ponto de inflexão

2ª Questão: (1,5 pontos)

Calcule $\int_R x^2 y \, dA$, sendo R a região do plano limitada pelas curvas cujas equações são $x + y^2 = 16$ e $y - x = 4$.

Cálculos e respostas:



$$y - 4 = 16 - y^2$$

$$y^2 + y - 20 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2} \begin{cases} \nearrow -5 \\ \searrow 4 \end{cases}$$

PROAC / COSEAC - Gabarito

Cálculos e respostas:

$$I = \int_{-5}^{4} \int_{y-4}^{16-y^2} x^2\ y\ dx\ dy = \int_{-5}^{4} \left[\frac{x^3 y}{3}\right]_{y-4}^{16-y^2} dy =$$

$$= \int_{-5}^{4} \left[\frac{\left(16-y^2\right)^3 \cdot y}{3} - \frac{(y-4)^3\ y}{3}\right] dy =$$

$$= \int_{-5}^{4} \frac{\left(16-y^2\right)^3 y\ dy}{3} - \int_{-5}^{4} \frac{(y-4)^3 y}{3}\ dy = -\int_{-9}^{0} \frac{u^3\ du}{2 \cdot 3} - \int_{-9}^{0} \frac{v^3\,(v+4)}{3}\ dv$$

$$= -\ \frac{u^4}{4 \cdot 3 \cdot 2}\Bigg|_{-9}^{0} - \frac{1}{3}\left[\frac{v^5}{5} + v^4\right]_{-9}^{0} = \frac{-3^{10}}{40}$$

$u = 16 - y^2$

$du = -2ydy$

$y=-5 \qquad u = -9$

$y = 4 \qquad u = 0$

$y - 4 = v$

$y = v + 4$

$dy = dv$

$y = -5 \qquad v = -9$

$y = 4 \qquad v = 0$

PROAC / COSEAC - Gabarito

$3^{\underline{a}}$ Questão: (1,0 ponto)

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ e determine, se possível:

a) o determinante de A

b) a matriz inversa de A

Cálculos e respostas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

a) det A = -15 – 40 – 84 + 175 – 24 – 12 = 0

b) Não existe matriz inversa de A pois det A = 0

PROAC / COSEAC - Gabarito

$4^{\underline{a}}$ Questão: (1,0 ponto)

Considere a função f definida por $f(x, y) = e^{2x} \cos^2 y$.

Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{2x}$.

Cálculos e respostas:

$f(x,y) = e^{2x} \cos^2 y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x} \cos^2 y \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4e^{2x} \cos^2 y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2e^{2x} \cos y \ \operatorname{sen} y = -e^{2x} \operatorname{sen} \ 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2e^{2x} \cos \ 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4e^{2x} \cos \ 2y - 2e^{2x} \cos \ 2y =$$

mas $\cos 2y = \cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y$

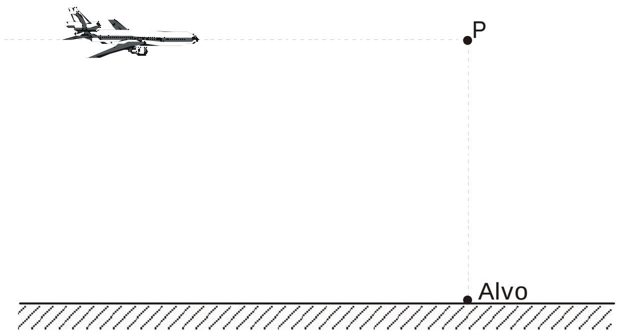
$$= 2\, e^{2x}(2\cos^2 y - \cos^2 y) = 2e^{2x}\, [2\cos^2 y - \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y]$$

$$= 2\, e^{2x}\, [\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y]$$

$$= 2\, e^{2x}$$

5ª Questão: (1,5 pontos)

Um avião bombardeiro voa horizontalmente com velocidade constante de $9{,}0 \times 10^2$ km/h, a uma altitude de $1{,}8 \times 10^4$ m em direção a um ponto P situado na mesma vertical que o seu alvo. Num dado instante, o avião solta uma bomba. Considere desprezível a resistência do ar e $g = 10 m/s^2$.

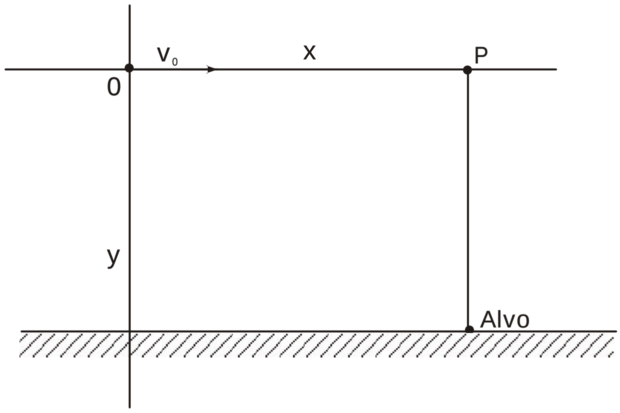


A bomba, para atingir o alvo, deve ser solta:

a) quantos minutos antes de o avião passar pelo ponto P?

b) a que distância horizontal (em km) do alvo?

Cálculos e respostas:



a) $y = \frac{1}{2} g t^2 \quad \therefore \quad t = \sqrt{\frac{2y}{g}} \quad \therefore \quad t = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}8 \times 10^4}{10}}$

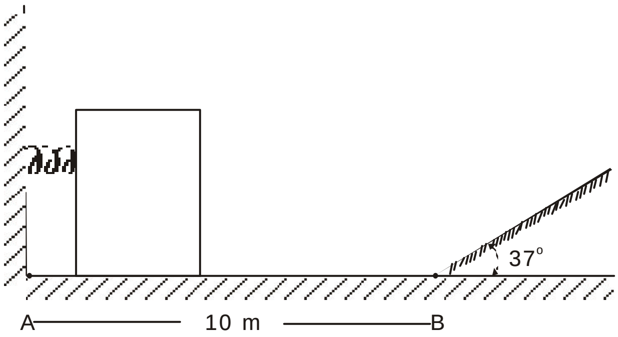
$t = 60$ s $\quad \therefore \quad t = 1{,}0$ minutos

b) $x = v_o \cdot t \quad \therefore \quad x = 900 \times \frac{1}{60} = 15 \quad \therefore \quad x = 15$ km

PROAC / COSEAC - Gabarito

6ª Questão: (1,5 pontos)

Um bloco de massa igual a 0,50 kg, em repouso, está encostado numa pequena mola de constante elástica $5{,}0 \times 10^2$ N/m, comprimida de 10 cm, conforme mostra a figura.



Num dado instante, a mola é liberada, projetando o bloco sobre a superfície horizontal AB cujo comprimento é 10 m. A superfície AB e o plano inclinado que se segue a ela têm atrito desprezível. Considere g = 10m/s^2.

Responda:

a) Qual a velocidade escalar do bloco meio metro antes de atingir o ponto B?

b) Qual a altura máxima, em relação à horizontal AB, que o bloco atingirá?

Cálculos e respostas:

a) $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$

$$v = \sqrt{\frac{kx^2}{m}} = \sqrt{\frac{5 \times 10^2 \times 10^{-2}}{0{,}5}} = \sqrt{10}$$

v = 3,2 m/s

b) $\frac{1}{2}kx^2 = mgh$

$$h = \frac{kx^2}{2mg} = \frac{5 \times 10^2 \times 10^{-2}}{2 \times 0{,}5 \times 10} = 0{,}50$$

h = 0,50 m

PROAC / COSEAC - Gabarito

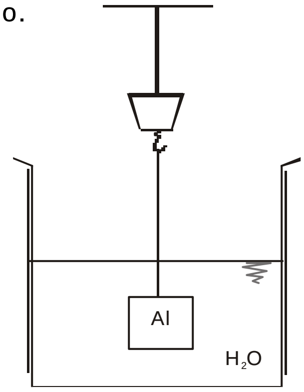
7ª Questão: (1,0 ponto)

Um bloco de alumínio de 2,7 kg está em repouso, totalmente imerso na água colocada no recipiente mostrado na figura. O bloco está suspenso a um dinamômetro preso ao teto.

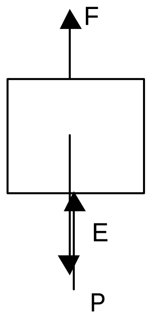
Determine o valor da indicação do dinamômetro.

Dados:

massa específica do alumínio: 2,7 g/cm^3
massa específica da água: 1,0 g/cm^3
aceleração da gravidade: 10m/s^2



Cálculos e respostas:



$$P = F + E$$

$$F = P - E$$

$$F = m_{Al} \cdot g - V_s \mu_L g$$

$$F = m_{Al} \cdot g - V_{Al} \cdot \mu_{H_2O} \cdot g$$

$$F = m_{Al} \; g - \frac{m_{Al}}{\mu_{Al}} \cdot \mu_{H_2O} \cdot g$$

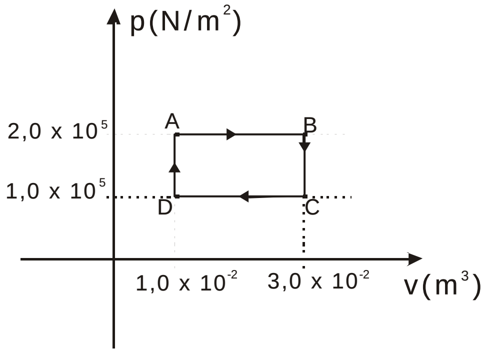
$$F = m_{Al} \cdot g \left(1 - \frac{\mu_{H_2O}}{\mu_{Al}} \right)$$

$$F = 2{,}7 \times 10 \left(1 - \frac{1}{2{,}7} \right)$$

$$F = 27 \times \frac{1{,}7}{2{,}7} \quad \therefore \quad F = 17\ N$$

8ª Questão: (1,0 ponto)

A figura abaixo representa, num gráfico pressão x volume, uma série de transformações sofridas por um gás ideal, perfazendo um ciclo A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ D $\rightarrow$ A .



Calcule:

a) O trabalho realizado pelos gás durante este ciclo.

b) A variação da energia interna do gás entre os estados inicial e final deste ciclo.

Cálculos e respostas:

a) $W = 2 \times 10^{-2} \times 1 \times 10^{5} = 2 \times 10^{3}$

$W = 2{,}0 \times 10^{3}$ J

b) $T_f = T_i \quad \therefore \quad U_f = U_i \quad \therefore \quad \Delta U = U_f - U_i$

$\Delta U = 0$

PROAC / COSEAC - Gabarito